

文章编号: 1003-1480 (2009) 05-0020-05

爆炸式防暴弹的弹体爆炸模型及其数值模拟

庄弘炜¹, 赵法栋¹, 罗万青²

(1. 武警工程学院, 陕西 西安, 710086; 2. 西安交通大学理学院, 陕西 西安, 710049)

摘 要: 从流体力学的观点出发, 建立了爆炸式防暴弹的弹体爆炸模型, 根据需要在—维情形下对各种条件做了—定的简化, 最后用有限元方法求解了该问题的近似解, 根据米赛斯屈服准则得到了不同材料动态屈服应力条件下的速度分布。认为弹体爆轰产物的整体速度值的大小主要受初始速度值和瞬时爆轰压力的影响, 在相同条件下, 弹体越厚, 破裂半径越小, 速度递减得越快。

关键词: 防暴弹; 爆炸模型; 有限元; 米赛斯屈服准则

中图分类号: TJ413.7 **文献标识码:** A

The Explosion Model and Numerical Simulation of Explosive Anti-riots Munition

ZHUANG Hong-wei¹, ZHAO Fa-dong¹, LUO Wan-qing²

(1. Equipment and Transportation Department of Engineering College of Chinese Armed Police Force, Xi'an, 710086; 2. Science College of Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049)

Abstract: From the viewpoint of hydrodynamics, the explosion model of explosive anti-riots munition is established and a variety of conditions are certainly simplified according to the needs of one-dimensional cases. At last, the approximate solution of the problem is got by the finite element method, and the velocity distribution under the condition of dynamic yield stress of different materials is got according to Mises yield criterion. It is thought that the overall velocity of detonation products is mainly affected by the initial value of detonation velocity and instantaneous pressure. Under the same condition, the thicker the body is, the smaller the burst radius is, the faster the decline rate of velocity is.

Key words: Anti-riots munition; Explosion model; The finite element; Mises yield criterion

各类爆炸式防暴弹的战术目的之一都是以炸药爆炸的形式产生一定声压级爆震声来震慑、驱散人群, 其作用迅速、威慑力强, 已成为世界各国部队、警察普遍装备的非致命弹药。然而, 弹体爆炸产生弹片进射中人体头部或颈部等脆弱部位会对人员造成严重伤害甚至死亡, 是爆炸式防暴弹使用中存在的主要安全隐患^[1]。弹片初速度是弹片杀伤力的关键因素, 因此, 如果找出弹体爆炸时在从膨胀破裂到弹片飞出的过程中与弹片初速度相关的因素, 就可以通过

限制弹片初速度来降低弹片杀伤力。

1 模型建立

弹体被引爆后, 其内部的炸药爆炸迫使弹壳迅速向外膨胀, 超过弹壳材料承受能力的时候弹壳开始破裂, 最后壳体全部破裂形成破片向四周飞散。本文只处理比较简单的弹体破裂情况, 所以对模型做出以下假设^[2]: 炸药爆炸为瞬时爆轰; 弹体破裂过程中的弹

收稿日期: 2009-07-16

作者简介: 庄弘炜 (1969-), 女, 副教授, 从事数值计算、非致命武器研究。

性阶段不考虑,采用不可压缩理想化刚体材料模型;只在一维情况下考虑。

以 r, θ, z 表示柱坐标系下的3个坐标,用 ρ 表示壳体材料的密度,用 u 表示壳体内某点的瞬时径向速度。弹体爆炸产物的运动可以看成是流体运动,根据流体连续介质模型在柱坐标系下由质量守恒和动量守恒建立方程。

1.1 连续方程

在柱坐标系下取单元体,如图1所示,图1中符号 $(\rho u)_r$ 表示 $\partial(\rho u)/\partial r$ 。其6个空间面为垂直于 z 轴的 z 面和 $z + dz$ 面、半径为 r 和 $r + dr$ 的圆柱面、极角为 θ 和 $\theta + d\theta$ 的子午面。

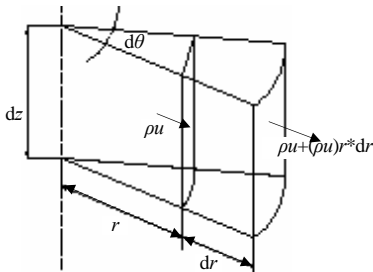


图1 通过单元体的质量流

Fig.1 The mass flow passed through each cell

在时间 t 到 $t + dt$ 这段时间间隔里,根据质量守恒条件,通过六面体的各表面流进单元体的物质总量应该等于 dt 时间间隔内六面体物质质量的增加量。由轴对称条件知,子午面 θ 和 $\theta + d\theta$ 面没有质量通过,忽略轴向变形, z 面和 $z + dz$ 面同样也没有质量通过,只有 r 面和 $r + dr$ 面有质量通过。则可得连续方程为:

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u r)}{\partial r} \quad (1)$$

1.2 运动方程

单元体上的应力分布如图2所示。

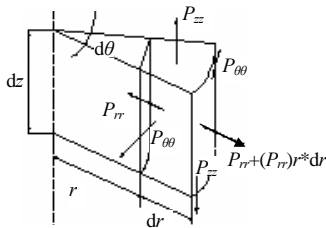


图2 单元体上的应力分布

Fig.2 The pressure distribution in each cell

图2中 $P_{rr}, P_{\theta\theta}, P_{zz}$ 表示壳体的瞬时应力,

$(P_{rr})_r$ 表示 $\partial P_{rr}/\partial r$ 。由问题的轴对称性可知,单元体四角不发生角反应变,切应力均为零,如果再忽略体积力,则单元体只受到面力 $P_{rr}, P_{\theta\theta}$ 和 P_{zz} 的作用。

由于只有 r 方向有质量通过,所以也只有 r 方向有动量流入流出。根据动量守恒条件,六面体内动量的增加量等于通过各面动量的净流入量加上各面力所作用的冲量,即有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u r d\theta dz dr) dt &= u \rho u r d\theta dz dt \\ &- (u \rho u r + \frac{\partial(u \rho u r)}{\partial r} dr) d\theta dz dt - P_{rr} r d\theta dz dt \\ &+ (P_{rr} r + \frac{\partial(P_{rr} r)}{\partial r} dr) d\theta dz dt - 2 \times \frac{P_{\theta\theta}}{2} dr d\theta dz dt \end{aligned}$$

展开并代入式(1)式整理得:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{P_{rr} - P_{\theta\theta}}{r} \quad (2)$$

1.3 不可压缩条件

本文采用不可压缩理想化刚体材料模型,所以要满足不可压缩条件。如果用 a_0, b_0 分别表示壳体膨胀前的内壁半径和外壁半径,用 a, b 分别表示壳体变形过程中的内壁半径和外壁半径。则不可压缩条件表示为: $b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2$

$$\text{即 } b = \sqrt{b_0^2 - a_0^2 + a^2} \quad (3)$$

在处理问题时,先选定 a , 然后求出 b , 再进行问题的推导和求解。

1.4 爆轰产物状态方程

假设 q_0 表示瞬时爆轰时爆轰产物的压力, q 表示膨胀过程中爆轰产物的压力, q 和 q_0 之间的关系可由修正后的爆轰产物状态方程给出。修正后的爆轰产物状态方程^[2]为:

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\eta r} \quad (4)$$

式(4)中: r 为爆轰产物多方指数,一般情况下取近似值为3;当只考虑径向膨胀时, η 值取为2,如果考虑球形膨胀, η 值取为3,其它情形就取为2到3之间。理论分析和实验观察表明,爆轰产物的膨胀与爆轰产物的压力密切相关。

2 模型简化

2.1 方程简化

式(2)中包含的未知数过多,有 $u, P_{rr}, P_{\theta\theta}$,

为了便于求解,引入圆柱坐标系下的本构方程^[3],且在本文讨论的一维情况下, r 方向的速度分量 $v_r = u$, 其他两个方向的速度分量均为零。则整理得到:

$$P_{rr} = -p + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \frac{u}{r} \quad (5)$$

$$P_{\theta\theta} = -p - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3}\mu \frac{u}{r} \quad (6)$$

式(5)~(6)中: p 为热力学压强, μ 为动力粘性系数。

把式(5)、(6)代入方程(2)得到如下方程:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\rho u - \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3}\mu \frac{u}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

可以看出该方程为一维不定常非线性 N-S 方程。

2.2 初边值条件

所谓边界条件,就是在所研究的运动流体边界上,封闭方程组的解必须满足的条件。在该问题中的边界条件为:

当在边界 $r = a$ 时, r 方向上的瞬时应力为:

$$P_{rr} = -q \quad (8)$$

当在边界 $r = b$ 时, r 方向上的瞬时应力为:

$$P_{rr} = 0 \quad (9)$$

假设热力学方程为:

$$p = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} (ru) = -\frac{1}{\varepsilon} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} + u \right) \quad (10)$$

式(10)中 ε 为小于 1 的正常数,显然:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (11)$$

假设时间 $t = 0$ 时 u 在 $[a, b]$ 区间上的值已知,且设 $u(0, r) = u_0(r)$ 。

则由式(7)、(8)、(9)、(10)、(11)

得到所要求解的边界问题:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{4}{3}\mu + \frac{r}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\rho u - \frac{4}{3}\mu - \frac{2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3}\mu \frac{u}{r^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial u(t, r)}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{-3q\varepsilon a + 2\mu\varepsilon u(t, a) - 3au(t, a)}{4\mu\varepsilon a + 3a^2} \\ \left. \frac{\partial u(t, r)}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{2\mu\varepsilon u(t, b) - 3bu(t, b)}{4\mu\varepsilon b + 3b^2} \\ u(0, r) = u_0(r) \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中, r 的取值范围是 $a < r < b$ 。

3 求解与结论

3.1 方程线性化

有限元方法是一种求解微分方程定解问题的有效方法^[4]。它的特点是:网格剖分可以是任意形状的,而且比较大,能弥补有限差分法的不足。在处理复杂的曲线边界时十分灵活方便,求解步骤规范化,易于编写通用程序。本文采用有限元方法对偏微分方程进行了求解。把区间 $[a, b]$ 等分成 $n-1$ 份,每份长度为 h ,取试探函数空间与检验函数空间相同,都为

$V = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, 其中的 φ_i 定义如下:

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} \frac{r_2 - r}{h}, & r \in [r_1, r_2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\varphi_i(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{h}, & r \in [r_{i-1}, r_i] \\ \frac{r_{i+1} - r}{h}, & r \in [r_i, r_{i+1}], i = 2, 3, \dots, n-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\varphi_n(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{n-1}}{h}, & r \in [r_{n-1}, r_n] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{令 } u = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(r), v = \varphi_j(r) \quad (13)$$

当在某一特定时间层上时, $\alpha_i(t)$ 为确定的值。

用 φ_i 、 φ_j 、 φ_i' 、 φ_j' 分别表示 $\varphi_i(r)$ 、 $\varphi_j(r)$ 、 $\varphi_i'(r)$ 、 $\varphi_j'(r)$, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。则将原微分方程转化成了代数方程组 $A\alpha = d$

其中: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$

且有:

$$A_{i,j} = \rho \int_a^b r \varphi_i \varphi_j \, dr + \frac{4\mu\Delta t}{3} \int_a^b r \varphi_i' \varphi_j' \, dr + \rho \Delta t u^k(r_i) \int_a^b r \varphi_i' \varphi_j \, dr + \frac{4\mu\Delta t}{3} \int_a^b \frac{1}{r} \varphi_i \varphi_j \, dr + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \int_a^b r^2 \varphi_i' \varphi_j' \, dr$$

右端项表示为:

$$d_j = \Delta t \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{4\mu}{3} + \frac{r}{\varepsilon} \right) r \varphi_j \Big|_a^b + \rho u^k(r_i) \int_a^b r \varphi_j \, dr$$

3.2 数值实验

根据已知条件 a_0 、 b_0 、 q_0 和 a , 由式(3)可以

求得 b ，由式(4)可以求得 q 。将其代入 $A_{i,j}$ 和 d_j 的表达式中求得系数矩阵和右端项，进而求出方程组的解 a ，代入式(13)即可求得各节点上的速度值，代入式(10)即可求得各节点上的热力学压强值。以上过程用 Fortran 语言编写程序实现，通过修改其中部分参数，观察结果随参数变化的变化情况，对结果进行简要分析。

由于满足所求方程边界条件的特解很难构造，所以先用齐次边界特解验证程序。设齐次边界特解为：

$$u(t,r) = e^{-t} (r-a)^2 (r-b)^2 \quad (14)$$

将式(14)代入式(12)中第1个式子得到方程右端项以及初始条件，代入程序，其中参数分别取爆炸前内径 $a_0 = 0.2$ m，外径 $b_0 = 0.25$ m，爆炸过程中某一时刻内径 $a = 0.23$ m，节点数为 100，粘性系数取 0.001，爆轰产物密度取为 2kg/m^3 ，瞬时爆轰时爆轰产物产生的压力设为 1 000 000 Pa。则程序运算后，部分节点的计算值与精确值的比较见表 1。

表 1 齐次边界特解计算误差比较

Tab.1 Comparison of the calculation error and the particular solution of homogeneous boundary

| 节点 | 近似解 | 真解 | 相对误差 |
|----|--------------------|--------------------|--------------------|
| 10 | 0.269598601221E-07 | 0.269347152444E-07 | 0.933549047033E-03 |
| 20 | 0.948731866401E-07 | 0.948303799187E-07 | 0.45140306763E-03 |
| 30 | 0.169154731111E-06 | 0.169101283495E-06 | 0.316068660849E-03 |
| 40 | 0.224678316840E-06 | 0.224618681892E-06 | 0.265494158383E-03 |
| 50 | 0.246184043817E-06 | 0.246121387105E-06 | 0.254576462014E-03 |
| 60 | 0.228278395298E-06 | 0.228215767203E-06 | 0.274424924717E-03 |
| 70 | 0.175434351490E-06 | 0.175375746330E-06 | 0.334169128869E-03 |
| 80 | 0.101991432189E-06 | 0.101942804705E-06 | 0.477007509168E-03 |
| 90 | 0.321557465099E-07 | 0.321259786235E-07 | 0.926598588698E-03 |

由表 1 可以看出，只要剖分比较细，得到的误差将很小，证明了程序的适用性。修改参数运行程序，再分析比较结果。首先把节点数目修改为 10，其它参数和上文给出的一样，初始条件假设为 $u_0(t,r) = (20+r)$ m/s，则程序的运行结果见表 2。

表 2 运行结果 1

Tab.2 Operational results 1

| 节点 | 速度(m·s ⁻¹) | 热力学压强/Pa |
|----|------------------------|------------------|
| 1 | 8743.93554687500 | 614972.969750947 |
| 2 | 7230.84423828125 | 571413.062027918 |
| 3 | 6029.09033203125 | 461666.054221112 |
| 4 | 5074.99218750000 | 371868.361010117 |
| 5 | 4318.85839843750 | 297967.449162637 |
| 6 | 3721.79809570312 | 236751.020835161 |
| 7 | 3253.29418945312 | 185661.847668754 |
| 8 | 2889.34838867188 | 142655.795883088 |
| 9 | 2611.05615234375 | 106090.937796946 |
| 10 | 2403.51293945312 | 90990.1665700879 |

若保持其它参数不变，只修改参数 ε ，可以发现 ε 对结果影响非常大，若取为 0.02，则运行结果见表

3。

表 3 运行结果 2

Tab.3 Operational results 2

| 节点 | 速度(m·s ⁻¹) | 热力学压强/Pa |
|----|------------------------|-------------------|
| 1 | 5300.7026367875 | 340600.677293153 |
| 2 | 5039.77832031250 | 326820.024780490 |
| 3 | 4812.48632812500 | 273033.695922367 |
| 4 | 4615.46337890625 | 222328.656093488 |
| 5 | 4445.76806640625 | 174332.629842336 |
| 6 | 4300.82421875000 | 128712.583011648 |
| 7 | 4178.37158203125 | 85167.3960284365 |
| 8 | 4076.42675781250 | 43424.2351252055 |
| 9 | 3993.24633789062 | 3238.59287089265 |
| 10 | 3927.29614257812 | -13609.1142520081 |

参数 ε 尤其对热力学压强的影响比较大，如果取为 0.001，则后面 6 个节点上的热力学压强都为负值。同时，如果保持别的参数不变，只修改 μ ，对结果影响不太大。下面把爆炸过程中某时刻内径修改为 0.24m，则运行结果见表 4。

表 4 运行结果 3

Tab.4 Operational results 3

| 节点 | 速度(m·s ⁻¹) | 热力学压强/Pa |
|----|------------------------|------------------|
| 1 | 6749.83154296875 | 479322.425423023 |
| 2 | 5660.76123046875 | 446569.825611878 |
| 3 | 4784.67333984375 | 364663.912299195 |
| 4 | 4080.55932617188 | 296743.192951970 |
| 5 | 3515.92822265625 | 240115.001010293 |
| 6 | 3064.97192382812 | 192613.329803171 |
| 7 | 2707.14868164062 | 152488.911738071 |
| 8 | 2426.07910156250 | 118324.114194676 |
| 9 | 2208.68603515625 | 88964.7304404697 |
| 10 | 2044.52319335938 | 76755.3661585045 |

由表 4 可以看出，如果内径变大，即弹壳向外膨胀过程中，速度是在不断降低的。这与实际情况相符。整体速度值的大小主要受初始速度值 u_0 和瞬时爆轰压力 q_0 的影响。

3.3 米赛斯屈服准则

米赛斯屈服条件，即形状应变能理论，认为：同一种材料，不管什么应力状态类型，屈服时的形状应变能密度值为一定值。假设破裂是从外壁开始向内壁发展的，并且认为破裂机理是环向拉伸破坏，则当破裂面贯通壳体时，内壁的环向应力 $P_{\theta\theta}$ 应该等于零^[1]。根据米赛斯屈服准则，若已知材料的动态屈服应力 P_Y^D ，可求得 q ：

$$q = \frac{2\sqrt{3}}{3} P_Y^D \quad (15)$$

由爆轰状态方程(4)可以得到内半径 a ，此时的内半径就是破裂半径。根据破裂半径按上述算法就得到了破裂速度。对程序稍加修改，参数仍取爆炸前内径 $a_0 = 0.2$ m，外径 $b_0 = 0.25$ m，节点数为 10，粘

性系数取 0.001, 爆轰产物密度取为 2kg/m^3 , 瞬时爆轰时爆轰产物产生的压力设为 $1\,000\,000\text{Pa}$, 改变材料动态屈服应力与速度之间的关系, 其中内半径上的点的速度即为破裂速度。

先求出在不同材料动态屈服应力的条件下的速度分布, 再用 Matlab 绘图, 如图 3 所示。

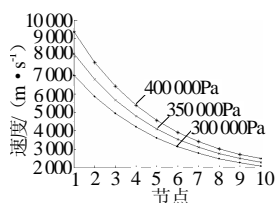


图 3 不同材料屈服应力条件的速度比较

Fig.3 Comparison of the velocity of yield stress condition of different material

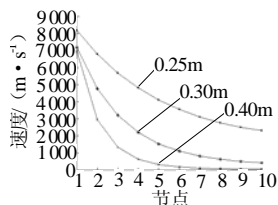


图 4 不同弹体厚度爆炸速度比较

Fig.4 Comparison of explosive velocity of different body thickness

由图 3 可以看出速度从里向外在递减, 同时材料动态屈服应力越大, 整体速度递减得越快。保持材料动态屈服应力为 $350\,000\text{Pa}$ 不变, 不同弹体厚度下的爆炸速度比较见图 4。由图 4 可以看出, 同样的材料, 即破裂半径相同, 弹体越厚, 破裂半径越小, 而且速

度减小得越快, 这与实际情形吻合。

4 结束语

文中对弹体爆炸的各种条件进行了一定的简化, 得出的结论与实际情况相吻合, 说明模型的假设和简化具有合理性。但只讨论了比较简单的一维情形, 如果进一步结合实验数据, 并在二维、三维情形下修正模型和算法, 得到的结果更符合实际, 从而指导爆炸式防暴弹药的设计生产。

参考文献:

- [1] Neil Davison. The Contemporary development of "non-lethal" weapons[R]. University of Bradford, 2007.
- [2] 张国伟. 终点效应及其应用技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [3] 费祥麟. 高等流体力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [4] 胡健伟, 汤怀民. 微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [5] 赵玉香, 匙彦斌. FORTRAN77——重点分析与模拟试题练习[M]. 天津: 天津大学出版社, 1997.